Μάθημα 12ο   30/04/2020

Στο χθεσινό μάθημα είδαμε ότι:

- Η εκθετική e^{x+iy} είναι ακέραια αφού u, v είναι άπειρες φορές συνεχώς διαφ/μες και ισχύουν οι εξισώσεις Cauchy-Riemann.
  με $(e^z)' = e^z$
- $f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + i v_x(x_0,y_0)$

- Η συνάρτηση $\log z$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ γιατί δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ γιατί αν ήταν διαφορίσιμη στο $\mathbb{C} \setminus [-\infty, 0]$ τότε θα ήταν και συνεχής το οποίο δεν ισχύει

Πρόταση 3.1.2 (απόδειξη δύσκολη δεν θα την βάλει)

$D \subset \mathbb{C}$: ανοικτό, $g: D \to \mathbb{C}$ συνεχής με $f = \exp g : D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη. Τότε g: ολόμορφη με μιγαδική παράγωγο.

$$g'(z_0) = \frac{f'(z_0)}{f(z_0)}$$

Π.χ 3.1.6

$$z^\lambda = e^{\lambda \log z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Από κανόνα αλυσίδας

$$(z^\lambda)' = (e^{\lambda \log z})' = e^{\lambda \log z} \cdot (\lambda \log z)' = z^\lambda \cdot \lambda (\log z)'$$

$$(z^\lambda)' = \frac{z^\lambda \cdot \lambda}{z} = \lambda \cdot z^{\lambda - 1}$$

Επειδή $\lambda z = (\lambda_1 + i\lambda_2)(x+iy)$

$$= \lambda_1 x - \lambda_2 y + i(\lambda_2 x + \lambda_1 y)$$

$$\hat{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 x - \lambda_2 y \\ \lambda_2 x + \lambda_1 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ΣΥΝΟΨΗ SOS

→ Αν η $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) \hat{=} \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$

είναι $\mathbb{C}$-διαφορίσιμη στο $z_0 = x_0 + iy_0$ με $\mathbb{C}$-παράγωγο $f'(z_0) = \lambda$ [$\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}$-διαφορικό : $f'(z_0)z = \lambda z$],

τότε το $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y)$ είναι διαφ. στο $\mathbb{R}^2$ με

$$(1) \quad \boxed{D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(x_0,y_0) & -u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}}$$

(Ισχύει και το αντίστροφο (: Θ. C-R) του παραπάνω.)

- Εφόσον η f είναι $\mathbb{C}$-διαφ/μη στο z_0 και αφού $f'(z_0) = \lambda$ θα έχω:

$$f'(z_0) = \lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \hat{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{pmatrix} u_x(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

$$\hat{=} u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0).$$

→ $f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0)$.

$$\overset{C\text{-}R}{=} v_y(x_0,y_0) + i(-u_y(x_0,y_0))$$

$$= v_y(x_0,y_0) + i\cdot(i\cdot i)\, u_y(x_0,y_0)$$

$$= \underbrace{-ii}_{=1} (v_y(x_0,y_0) - i\, u_y(x_0,y_0)) =$$

$$= -i\,(u_y(x_0,y_0) + i\,v_y(x_0,y_0))$$

$$= -i f_y(x_0 + i y_0)$$

Άρα: $\boxed{f'(z_0) = f_x(z_0) = -i f_y(z_0)}$: εφόσον η f είναι $\mathbb{C}$-διαφ/μη στο z_0

όπου $z_0 = x_0 + i\cdot y_0$

- $f(x+iy) = u(x,y) + v(x,y)$
- $f_x(x+iy) = u_x(x,y) + i\cdot v_x(x,y)$
- $f_y(x+iy) = u_y(x,y) + i\cdot v_y(x,y)$.

ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ,

- $\mu \bar{z} = (\mu_1 + i\mu_2)(x - iy)$

$$= (\mu_1 \cdot x + \mu_2 y) + i(\mu_2 x - \mu_1 y)$$

$$\hat{=} \begin{pmatrix} \mu_1 \cdot x + \mu_2 y \\ \mu_2 x - \mu_1 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_2 & -\mu_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- $\lambda z = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Επομένως:

$$\lambda z + \mu \cdot \bar{z} = \begin{pmatrix} \lambda_1+\mu_1 & -\lambda_2+\mu_2 \\ \lambda_2+\mu_2 & \lambda_1-\mu_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

<u>Πρόταση</u>

<u>Αν</u> η $f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y) \hat{=} \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$,

είναι $\mathbb{R}$-διαφορίσιμη στο $z_0 = x_0 + i y_0$ με $\mathbb{R}$-διαφορικό $df_{z_0}(z) = \lambda z + \mu \bar{z}$ <u>ΤΟΤΕ</u>

το $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y)$ είναι διαφορίσιμο στο $\mathbb{R}^2$ με

(*) $$D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \lambda_1+\mu_1 & -\lambda_2+\mu_2 \\ \lambda_2+\mu_2 & \lambda_1-\mu_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

- Ισχύει και το ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ.

- $$\begin{aligned} df_{z_0}(z) &= \lambda z + \mu \cdot \bar{z} \\ &= (\lambda_1+\mu_1)\cdot x + (-\lambda_2+\mu_2) y + i((\lambda_2+\mu_2)\cdot x + (\lambda_1-\mu_1) y) \\ &= u_x(x_0,y_0)\cdot x + u_y(x_0,y_0)\cdot y + i(v_x(x_0,y_0)\cdot x + v_y(x_0,y_0)\cdot y) \\ &= \underbrace{(u_x(x_0,y_0) + i v_x(x_0,y_0))}_{= f_x(x_0,y_0)} \cdot x + i\underbrace{(u_y(x_0,y_0) + i v_y(x_0,y_0))}_{= f_y(x_0,y_0)} \cdot y \end{aligned}$$

$$\boxed{df_{z_0}(z) = f_x(x_0,y_0)\cdot x + f_y(x_0,y_0)\cdot y} \quad (**)$$

- $x = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$

- $y = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$, Άρα με αντικατάσταση αυτών των δυο στην (**) θα έχουμε:

$$df_{z_0}(z) = f_x(z_0)\cdot\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right) + f_y(z_0)\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)$$

$$= \frac{f_x(z_0) - i f_y(z_0)}{2}\cdot z + \frac{f_x(z_0) + i f_y(z_0)}{2}\cdot \bar{z}$$

$$\xrightarrow[f_x = i f_y]{C-R} \frac{f_x(z_0) + f_x(z_0)}{2}\cdot z + \cancel{\frac{f_x(z_0) - f_x(z_0)}{2}}\cdot\bar{z}$$

Άρα: $df_{z_0}(z) = \dfrac{\cancel{2} f_x(z_0)\cdot z}{\cancel{2}}$

$$\boxed{df_{z_0}(z) = f_x(z_0) z}$$

Συμπέρασμα:

Αν η f είναι μιγαδικά διαφορίσιμη στο z_0 (ή $\mathbb{C}$-διαφ. στο z_0) τότε:

$$\boxed{df_{z_0}(z) = f_x(z_0) z}$$

ΣΥΝΟΨΗ: SOS - ARA

Η $\mathbb{R}$-διαφορίσιμη [ΜΗΝ ΤΟ ΞΕΧΝΑΜΕ] στο $z_0 = x_0 + iy_0$, $f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$

Είναι $\mathbb{C}$-διαφορίσιμη στο $z_0 \overset{C-R}{\iff}$

$\iff f_x(z_0) = -i f_y(z_0)$ και τότε

$$f'(z_0) = f_x(z_0) = -i f_y(z_0) \iff$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{2}\left(\partial x + i\partial y\right)}_{=\bar{\partial}\left(=: \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)} f(z_0) = 0$$

και τότε $\quad f'(z_0) = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\partial x - i\partial y\right)}_{=\partial\left(=: \frac{\partial}{\partial z}\right)} f(z_0)$

όπου : $\partial x f = f_x$

και

$\partial y f = f_y$

$$\Leftrightarrow \bar{\partial} f(z_0) = 0 \quad \text{και τότε} \quad f'(z_0) = \partial f(z_0)$$

→ Οι διαφορικοί τελεστές $\partial, \bar{\partial}$ ονομάζονται d, d-bar και ισχύει :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial + \bar{\partial}}{2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\bar{\partial} - \partial}{2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} = \partial x \quad \text{και} \quad \frac{\partial}{\partial y} = \partial y \right)$$

$$\Rightarrow df_{z_0}(z) = \partial f(z_0) z + \underbrace{\bar{\partial} f(z_0)}_{=0 \text{ : όταν } f \text{ είναι } \mathbb{C}\text{-διαφ/μη στο } z_0} \cdot \bar{z}$$

Πόρισμα (Cauchy-Riemann)

Η $\mathbb{R}$-διαφ/μη f στο D είναι ολόμορφη $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \bar{\partial} f = 0$ και τότε $f' = \partial f$

[Ορισμός : Η $\mathbb{R}$-διαφορίσιμη f στο D είναι αντιολόμορφη $\Leftrightarrow \partial f = 0$ και τότε η $\bar{\partial} f$ ονομάζεται παράγωγος ως προς $\bar{z}$]

Άσκηση Α.59

$$f(z) = \sqrt{z} := \sqrt{|z|} \cdot e^{i \frac{\operatorname{Arg} z}{2}}, \quad z \neq 0, \ f(0) = 0$$

- $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$

- $$e^{i \frac{\operatorname{Arg} z}{2}} = \cos\left(\frac{\operatorname{Arg} z}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\operatorname{Arg} z}{2}\right)$$

$$= \arctan \frac{y}{x} \quad (x>0)$$

Από αυτά τα δυο θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) \begin{pmatrix} (x^2+y^2)^{1/4} \cdot \cos\left(\frac{\operatorname{Arg}(x+iy)}{2}\right) \\ (x^2+y^2)^{1/4} \cdot \sin\left(\frac{\operatorname{Arg}(x+iy)}{2}\right) \end{pmatrix}, (x,y) \neq (0,0)$$

- Είναι διαφ. διανυσματικό πεδίο σίγουρα στο

$$R^2 \setminus (\{x=0\} \cup \{y=0\})$$

$$\partial_x u = \partial_x (x^2+y^2)^{1/4} \cdot \cos(\ldots) - \sin(\ldots) \cdot (x^2+y^2)^{1/4} \cdot \partial_x \left(\frac{\operatorname{Arg} z}{2}\right)$$

$$\partial_y v = \partial_y (x^2+y^2)^{1/4} \cdot \sin(\ldots) + \sin(\ldots) \cdot (x^2+y^2)^{1/4} \, \partial_y \left(\frac{\operatorname{Arg} z}{2}\right)$$

Π.Χ

$$f(z) = \sqrt{z} = z^{1/2} = e^{1/2 \operatorname{Log} z} \quad , z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

$$\Rightarrow f'(z) = z^{1/2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \cdot z^{-1/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}}$$

Πως ταιριάζω αυτό με τις Cauchy-Riemann, ιδίως τη στιγμή που η $\operatorname{Arg} z$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ δεν είναι $\mathbb{C}$-διαφόριμες ;

[βλέπε σχετικά και τη λύση στις τυπογραφημένες σημειώσεις]